



## 6 - Le modèle Reg-ARIMA

ALAIN QUARTIER-LA-TENTE  
Lemna, Insee

1. De la stationnarité aux modèles ARIMA
2. Construction du modèle ARIMA
3. Détermination du modèle ARIMA
4. Principe de TRAMO-SEATS
5. Conclusion

## Objectifs de cette séquence

---

Objectifs : modélisation Reg-ARIMA, pré-ajustement de X13-ARIMA.

Après cette séquence, vous saurez :

- La structure et les fonctions d'un modèle Reg-ARIMA
- Reconnaître les modèles de JD+ à partir des diagnostics
- Modifier les spécifications du modèle

# Questions de positionnement

---

Qu'est-ce qu'un processus stationnaire ?

Tendance, cycle, saisonnalité sont-ils des processus stationnaires ?

Que signifie "ARIMA" et que reflète un tel modèle ?

Comment se comportent les erreurs de prévision d'un modèle ARIMA ?

Qu'est-ce qu'un SARMA ?

Saurons nous "deviner" le comportement de la saisonnalité à travers un modèle ARIMA ?

Que sont les critères d'information et à quoi ça sert ?

# X13-ARIMA

---

Deux modules :

- Reg-ARIMA : phase de pré-ajustement
  - Régression linéaire pour correction préalable des « non-linéarités »
  - Modélisation ARIMA pour faire des prévisions
  - Deux étapes indépendantes en schéma, mais traitements itératifs !
- X11 : phase de décomposition

# Sommaire

---

## 1. De la stationnarité aux modèles ARIMA

### 1.1 Notion de stationnarité

### 1.2 La phase de pré-ajustement de X13-ARIMA

### 1.3 Modélisation ARIMA

## 2. Construction du modèle ARIMA

## 3. Détermination du modèle ARIMA

## 4. Principe de TRAMO-SEATS

## 5. Conclusion

## Quelques définitions (1/2)

---

*Série temporelle* : suite de variables aléatoires  $(X_t)_t$  dont on observe une réalisation  $(X_t(\omega))_t$

La suite  $(X_t)_t$  est appelée *processus stochastique*

Un processus est dit *stationnaire* lorsque la loi de  $X_t$  n'évolue pas dans le temps

⇒ Tous les moments théoriques sont indépendants du temps

➔ Notion pour faire l'inférence et construire un modèle ARIMA

## Quelques définitions (2/2)

---

Stationnarité, hypothèse invérifiable  $\rightarrow$  en pratique processus *faiblement stationnaire* :

- les moments d'ordre 2 existent
- espérance constante
- covariance entre  $t$  et  $t - h$  ne dépend pas du temps, mais de la distance  $h$   
 $\implies$  variance constante

Exemple : un bruit blanc, i.e. :

- espérance nulle
- covariance entre  $t$  et  $t - h$  nulle, pour tout  $h \neq 0$
- variance non nulle et constante

Attention : Moment d'une v.a. (moment d'ensemble  $t$  fixé) *différent* de moment temporel d'un processus (moment empirique épreuve fixée)



## La partie « régression linéaire » de X13-ARIMA

---

Objectif : supprimer les « non-linéarités » par régression linéaire :

- outliers
- effets de calendrier
- autres régresseurs éventuels (ex : température)

$$Y_t = \sum \hat{\alpha}_i O_{it} + \sum \hat{\beta}_j C_{jt} + X_t$$

Série *linéarisée* :  $X_t = Y_t - \sum \hat{\alpha}_i O_{it} - \sum \hat{\beta}_j C_{jt}$

GROS résidu de la régression

N'est pas le résidu Reg-ARIMA, qui est un bruit blanc

La décomposition est réalisée sur la série linéarisée

# La partie « modélisation ARIMA »

---

ARIMA, modèle auto-projectif :

$$X_t = f(X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3}, \dots, \varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2} \dots)$$

Trouver  $f$  ?

Sous hypothèse de stationnarité, il existe un « modèle ARMA » qui approche la série.

Conséquence (th de Wold) : erreurs de prévision se comportent comme le résidu du modèle (bruit blanc)

On privilégie les modèles avec faible nombre de paramètres.

Méthode de Box et Jenkins pour estimer et juger de la qualité des modèles.

# Sommaire

---

## 1. De la stationnarité aux modèles ARIMA

## 2. Construction du modèle ARIMA

### 2.1 Modèles AR et MA

### 2.2 Modèles SARMA et modèles intégrés

## 3. Détermination du modèle ARIMA

## 4. Principe de TRAMO-SEATS

## 5. Conclusion

# Modèles Autorégressifs (AR)

$B$  opérateur retard :  $B(X_t) = X_{t-1}$ , et  $B^p(X_t) = X_{t-p}$

Modèle *autorégressif*  
d'ordre  $p$ ,  $AR(p)$  :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$\iff (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) X_t = \varepsilon_t$$

$$\iff \Phi(B) X_t = \varepsilon_t$$

$\varepsilon_t$  *innovation* du processus (bruit blanc indépendant du passé de  $X$ )

Un AR modélise l'influence des  $p$  réalisations passées sur la réalisation courante : effet mémoire

Exemples :

- $AR(1)$  : niveau d'un lac ;
- $AR(2)$  : nombre de tâches solaires - Yules

## Modèles « Moving Average » (MA)

Modèle *moyenne mobile* d'ordre  $q$ ,  
 $MA(q)$  :

$$X_t = \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - \theta_2 \varepsilon_{t-2} - \dots - \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$\iff X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) \varepsilon_t$$

$$\iff X_t = \Theta(B) \varepsilon_t$$

Processus MA toujours stationnaire

Résulte d'une accumulation non persistante de "q" chocs indépendants

Phénomènes qui fluctuent autour d'une moyenne : MA(1) avec une constante

Exemples :

- Jeu de fléchettes
- Différences entre AR et MA : exemple de recettes de cuisine

# Modèles ARMA

---

Modèles  $ARMA(p, q)$  : combine  $AR(p)$  et  $MA(q)$ , sans ou avec constante

$$\Phi(B)X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

$$\Phi(B)X_t = \mu + \Theta(B)\varepsilon_t$$

Processus  $ARMA$  résulte de l'effet "mémoire" et d'une accumulation non persistante de chocs aléatoires indépendants

# Modèles SARMA

---

Modèle  $SARMA(P, Q)$  :  $ARMA$  avec polynôme d'ordre  $s$  (4 séries trimestrielles, 12 séries mensuelles) :

$$\Phi(B^s)X_t = \Theta(B^s)\varepsilon_t \text{ ou } \Phi_s(B)X_t = \Theta_s(B)\varepsilon_t$$

Intérêt :

- montrer autocorrélations d'ordre  $s$
- simplifier l'écriture par factorisation

$ARMA(p, q)(P, Q)$  combine parties régulière et saisonnière :  
 $ARMA(p, q) \times SARMA(P, Q)$ .

Identique à  $ARMA(p + P * s, q + Q * s)$

Exemple série mensuelle :  $ARMA(1, 1)(1, 1) = ARMA(13, 13)$

## Modèles Intégrés (1/3)

---

Soit  $X$ , processus « tendance linéaire » :

$$X_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t$$

Calculer l'espérance et la variance de la v.a.  $X_t$  ?

$X$  est stationnaire ?

Différence d'ordre 1 :

$$(I - B)X_t = ?$$

La série obtenue est-elle stationnaire ?

Si  $X$  est un processus « tendance polynomiale d'ordre 2 », comment stationnariser la série ?



## Modèles Intégrés (2/3)

---

Soit  $X$ , processus « saisonnier stable » :

$$X_t = S_t + \varepsilon_t \quad \text{avec} \quad \forall t, S_t = S_{t+s}$$

$X$  stationnaire ?

Différence d'ordre 1, avec retard d'ordre  $s$  :

$$(I - B^s)X_t = ?$$

La série obtenue est-elle stationnaire ?

Si  $X$  comportait en plus une tendance linéaire, que donnerait cette différenciation ?

## Modèles Intégrés (3/3)

---

Une différenciation « simple » d'ordre  $d$  supprime les tendances polynomiales d'ordre  $d$  :

$$(I - B)^d X_t$$

Une différenciation « saisonnière » supprime aussi les tendances linéaires :

$$(I - B^s)X_t$$

Une différenciation « saisonnière » d'ordre  $D$  plus grand que 1 est rare (dans  $JD+$ ,  $D \leq 1$ ) :

$$(I - B^s)^D X_t$$

# Modèles ARIMA

---

$ARIMA(p, d, q)$  modélise les séries non stationnaires avec tendance

$$\Phi(B)(I - B)^d X_t = \Theta(B)\varepsilon_t$$

$ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)$  modélise les séries avec tendance et saisonnalité

$$\Phi(B)\Phi_s(B)(I - B)^d(I - B^s)^D X_t = \Theta(B)\Theta_s(B)\varepsilon_t$$

Factorisation des polynômes en  $B$  de la partie *régulière* et de la partie *saisonnnière*

# Modèles ARIMA et saisonnalité (1/3)

---

Considérons la partie saisonnière d'un ARIMA :

- 1 - Une série avec modèle  $(p, d, q)(0, 0, 0)$  est-elle saisonnière ?
- 2 - que dire de  $(p, d, q)(0, 0, Q)$  ?
- 3 -  $(p, d, q)(0, 1, 0)$  ?
- 4 -  $(p, d, q)(1, 0, 0)$  ?

## Modèles ARIMA et saisonnalité (2/3)

---

Réponses :

1 - Non, aucune autocorrélation d'ordre  $s$

2 - Non, un MA reflète des fluctuations non persistantes, la saisonnalité persiste dans le temps

3 - Oui, une saisonnalité stable

4 - Ne sait pas, dépend de la valeur du coefficient  $\phi_s$

- $\phi_s$  petit en valeur absolue : pas de saisonnalité, phénomène non persistant qui se dissipe vite
- $\phi_s$  négatif : pas de saisonnalité, phénomène à répétitions bi-annuelles
- $\phi_s$  grand (proche de 1) et positif : série saisonnière, autocorrélations d'ordre  $s$  qui décroît lentement

# Modèles ARIMA et saisonnalité (3/3)

---

Deux cas fréquents :

- $(p, d, q)(0, 1, 1)$  saisonnalité stable en moyenne, avec des fluctuations ponctuelles du niveau de  $\theta_s$  (plus c'est grand, plus ça fluctue)
- $(p, d, q)(1, 0, 1)$  saisonnalité évolutive avec dérive + fluctuations ponctuelles de niveau  $\theta_s$

# Sommaire

---

1. De la stationnarité aux modèles ARIMA

2. Construction du modèle ARIMA

**3. Détermination du modèle ARIMA**

3.1 Méthode de Box-Jenkins

4. Principe de TRAMO-SEATS

5. Conclusion

# Méthode de Box-Jenkins

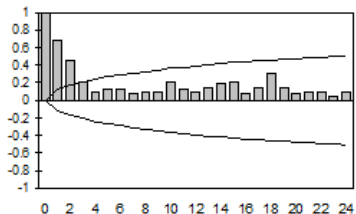
---

1. Stationnariser le processus :  $d, D$
2. Identifier les ordres ARMA :  $p, P, q, Q$  ➔ structure d'autocorrélation de la série
3. Estimer les coefficients ARMA ➔ degré de variabilité de la structure d'autocorrélation
4. Valider le modèle ➔ résidus = bruit blanc ?
5. Choix du modèle (si plusieurs modèles valides) ➔ critères d'information
6. Préviation

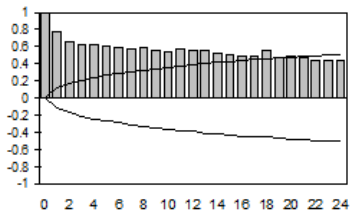


# Stationnarité et ACF

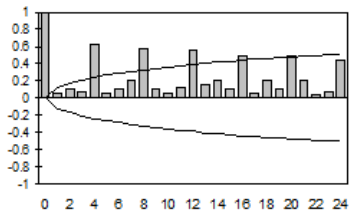
Série stationnaire



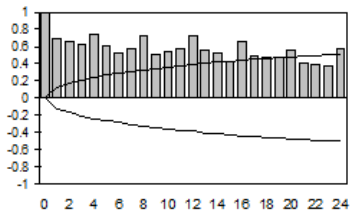
Série non stationnaire :  $(I-B)$  pr station.



Série non stationnaire :  $(I-B^s)$  pr station.



Série non stationnaire :  $(I-B)(I-B^s)$  pr sta.



## Choix du modèle

---

Critères d'information (à **minimiser**) pour comparer les modèles :

- L'AIC (critère de Akaiké) :

$$AIC(p, q) = -2 \ln(L) + 2 * (p + q)$$

- L'AICC (corrigé pour les courtes périodes) :

$$AICC(p, q) = -2 \ln(L) + 2(p + q) \left( 1 - \frac{n + p + 1}{N_{obs}} \right)^{-1}$$

- Le BIC (critère de Schwarz) :

$$BIC(p, q) = -2 \ln(L) + (p + q) \ln(N_{obs})$$

Ne pas comparer des modèles d'ordre de différenciation différents

# Sommaire

---

1. De la stationnarité aux modèles ARIMA

2. Construction du modèle ARIMA

3. Détermination du modèle ARIMA

**4. Principe de TRAMO-SEATS**

4.1 TRAMO

4.2 SEATS

5. Conclusion

# Principe de TRAMO

---

TRAMO = Time series Regression with ARIMA noise, Missing values and Outliers

Mêmes objectifs du pré-ajustement de X13-ARIMA (convergence des algorithmes dans JDemetra+ 3.0) :

- corriger la série de points atypiques, des effets de calendrier et imputation des valeurs manquantes
- prolonger la série
- fournir à SEATS le modèle ARIMA à la base de la décomposition

## Principe de SEATS (1/3)

SEATS = Signal Extraction in ARIMA Time Series

SEATS utilise le modèle ARIMA de la série linéarisée TRAMO :

$$\underbrace{\Phi(B)\Phi_s(B)(I-B)^d(I-B^s)^D}_{\Phi(B)} X_t = \underbrace{\Theta(B)\Theta_s(B)}_{\Theta(B)} \varepsilon_t$$

Hypothèses :

1. La série linéarisée peut être modélisée par un modèle ARIMA
2. Les différentes composantes sont décorréées et chaque composante peut être modélisée par un modèle ARIMA
3. Les polynômes AR des composantes n'ont pas de racine commune

## Principe de SEATS (2/3)

---

On factorise le polynôme AR  $\Phi(B)$  :

$$\Phi(B) = \phi_T(B)\phi_S(B)\phi_C(B)$$

- $\phi_T(B)$  racines correspondant à la tendance
- $\phi_S(B)$  racines correspondant à la saisonnalité
- $\phi_C(B)$  racines correspondant au cycle

## Principe de SEATS (3/3)

$X_t$  est exprimé sous la forme :

$$X_t = \frac{\Theta(B)}{\Phi(B)} \varepsilon_t = \underbrace{\frac{\theta_T(B)}{\phi_T(B)} \varepsilon_{T,t}}_{\text{Tendance}} + \underbrace{\frac{\theta_S(B)}{\phi_S(B)} \varepsilon_{S,t}}_{\text{Saisonnalité}} + \underbrace{\frac{\theta_C(B)}{\phi_C(B)} \varepsilon_{C,t}}_{\text{Cycle}} + \underbrace{\nu_t}_{\text{Irrégulier (bruit blanc)}}$$

Un modèle ARIMA est associé à chaque composante.

Infinité de solutions : on retient celle qui minimise la variance de l'irrégulier

- ➔ Estimation par filtre de Wiener-Kolmogorov
- ➔ En France c'est X-13ARIMA qui est principalement utilisé (il n'y a pas de "meilleure" méthode)

# Sommaire

---

1. De la stationnarité aux modèles ARIMA
2. Construction du modèle ARIMA
3. Détermination du modèle ARIMA
4. Principe de TRAMO-SEATS
- 5. Conclusion**



## Les essentiels

---

Les séries économiques ne sont pas stationnaires, ni leur niveau, ni leurs fluctuations ne sont constants dans le temps

Intégrer un processus permet de le stationnariser

Un MA capte les fluctuations non persistantes autour d'un niveau constant - processus stationnaire

Un AR met en évidence l'influence des réalisations passées sur la réalisation courante

Un ARIMA reflète la structure des autocorrélations de la série, ainsi que le degré de sa variabilité dans le temps

L'examen des résidus permet de valider les modèles, le choix "optimal" se fait grâce aux critères d'information

# Exercices

---

Exercices : écrire les modèles Reg-ARIMA de vos séries à partir des éléments donnés par JDemetra+