



## 4 - Méthode X13-ARIMA

ALAIN QUARTIER-LA-TENTE  
Lemna, Insee

1. Phase de pré-ajustement : modèle Reg-ARIMA
2. Phase de décomposition (X11)
3. Conclusion

## Objectifs de cette séquence

---

Cette séquence a pour objectif de vous présenter les concepts de base relatifs à la méthode X13-ARIMA.

Après cette séquence vous saurez :

- les vocabulaires relatifs à la méthode X13-ARIMA
- la structure de la méthode X13-ARIMA en deux étapes
- le fonctionnement et la finalité de la phase de pré-ajustement
- le principe de la décomposition

## Questions de positionnement

---

Quels usages de la phase de pré-ajustement dans la méthode X13-ARIMA ?

Quels sont les Outliers les plus couramment détectés ?

À quoi sert un modèle ARIMA dans la méthode X13-ARIMA ?

Qu'est ce que X11 ?

Qu'est ce que le principe itératif dans la décomposition ?

# X13-ARIMA

---

X pour eXperience. . .

Deux modules :

- REG-ARIMA : phase de pré-ajustement  
Correction préalable par régression linéaire des points aberrants, ruptures de tendance, effets de calendrier.

Modélisation ARIMA : pour prolonger la série brute afin de résoudre partiellement le problème des fins de série lié aux moyennes mobiles symétriques.

- X11 : phase de décomposition

Décomposition de la série en tendance-cycle, saisonnalité et irrégulier, à l'aide de moyennes mobiles.

# Sommaire

---

## 1. Phase de pré-ajustement : modèle Reg-ARIMA

### 1.1 Série linéarisée

### 1.2 Outliers et autres régresseurs

### 1.3 Modèle ARIMA

## 2. Phase de décomposition (X11)

## 3. Conclusion

# Linéariser la série

---

Les moyennes mobiles, comme les modèles ARIMA, sont des opérateurs linéaires. Il faut donc préalablement **supprimer les « non-linéarités »** des séries (points aberrants, effets de calendrier, ruptures. . .)

Par régression linéaire sur les :

- outliers (points aberrants et ruptures)
- effets de calendrier ➡ séquence de demain matin
- autres régresseurs éventuels (ex : température moyenne, vacances scolaires. . .)

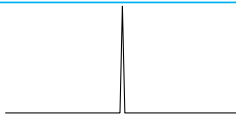
Série linéarisée =  $(Y_t - \sum \hat{\alpha}_i X_{it})$  où les  $X_i$  modélisent les « non-linéarités »

# Les principaux types d'outliers

## Choc ponctuel

*Additive outlier (AO)*

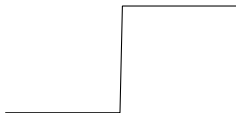
Affecte l'Irrégulier



## Changement de niveau

*Level Shift (LS)*

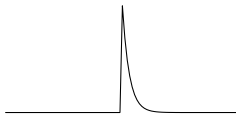
Affecte la Tendance



## Changement de niveau transitoire

*Transitory Change (TC)*

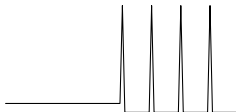
Affecte l'Irrégulier



## Rupture de profil saisonnier

*Seasonal Outlier (SO)*

Affecte la Composante Saisonnière





## Autres outliers *atypiques*

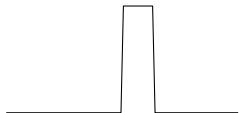
### Effet de rampe

*Ramp effect* (RP)

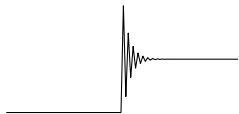


### Rupture en niveau temporaire

*Temporary level shift* (TLS)



**Changement en niveau atteint après une alternance entre des périodes de sur et sous-amortissement**



*Pure seasonal outlier* (PSO)



# Variables de régression associées aux outliers

$$AO_t^{t_0} = \begin{cases} 1 & t = t_0 \\ 0 & t \neq t_0 \end{cases}$$

$$LS_t^{t_0} = \begin{cases} -1 & t < t_0 \\ 0 & t \geq t_0 \end{cases}$$

$$TC_t^{t_0} = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ \alpha^{t-t_0} & t \geq t_0 \end{cases}$$

avec  $\alpha \in ]0, 1[$  ( $\alpha = 0,7$  par défaut)

$$SO_t^{t_0} = \begin{cases} 1 & t < t_0, t \text{ même mois que } t_0 \\ -\frac{1}{s-1} & t < t_0, t \text{ autre mois que } t_0 \\ 0 & t \geq t_0 \end{cases}$$

avec  $s$  la périodicité de la série

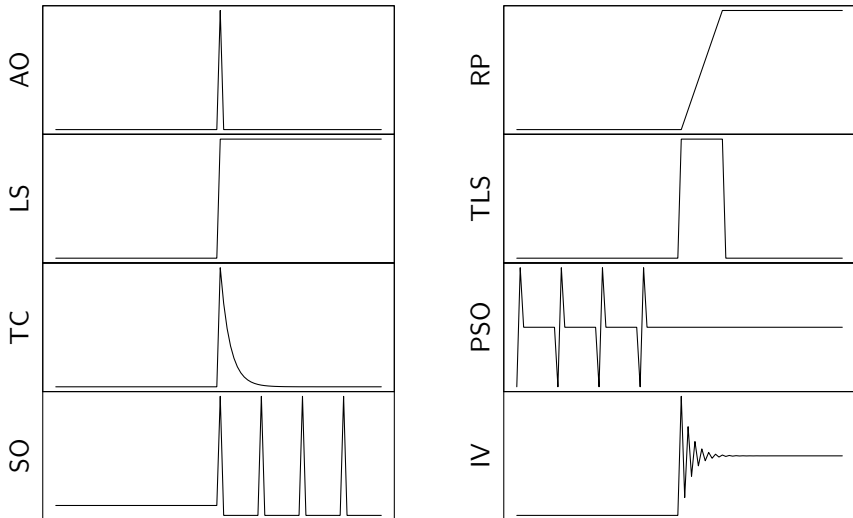
$$RP_t^{(t_0, t_1)} = \begin{cases} -1 & t \geq t_0 \\ -\frac{t-t_0}{t_1-t_0} - 1 & t_0 < t < t_1 \\ 0 & t \leq t_1 \end{cases}$$

$$TLS_t^{(t_0, t_1)} = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t_0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & t > t_1 \end{cases}$$

$$IV_t^{t_0} = \begin{cases} -1 & t < t_0 \\ 0 + (-\alpha)^{(t-t_0)} & t \geq t_0 \end{cases}$$

$$PSO_t^{(t_0, j)} = \begin{cases} 1 & t \text{ même mois que } j, t < t_0 \\ 0 & t \text{ autre mois que } j \text{ ou } t \geq t_0 \\ -1 & t \text{ même mois que } t_0, t < t_0 \end{cases}$$

# Outliers : résumé graphique



# La modélisation Reg-ARIMA

---

Le modèle Reg-ARIMA :

$$\left( Y_t - \sum \hat{\alpha}_i X_{it} \right) \sim ARIMA(p, d, q)(P, D, Q)$$

où les  $X_i$  modélisent les « non-linéarités »

Le modèle ARIMA capture toute l'information temporelle, le résidu du modèle Reg-ARIMA est un bruit blanc

Le modèle ARIMA est utilisé pour faire la prévision sur la série linéarisée

La structure du modèle Reg-ARIMA, ainsi que sa détermination seront vues en détail lors du module « avancé »

# Sommaire

---

## 1. Phase de pré-ajustement : modèle Reg-ARIMA

## 2. Phase de décomposition (X11)

2.1 Les moyennes mobiles

2.2 Le principe itératif de X11

2.3 Les étapes X11

## 3. Conclusion

# Les moyennes mobiles (1/2)

---

La décomposition X11 utilise les filtres que sont les moyennes mobiles

**Une MM est un opérateur linéaire :**

Linéarité :  $M(X_t + Y_t) = M(X_t) + M(Y_t)$

**3 types de MM utilisés par X11 :**

1. Moyennes mobiles simples (pour extraire la tendance)  $\rightarrow M_{2 \times 12}$

- conserve la tendance linéaire (locale) :  
 $M(at + b) = at + b \implies M(TC_t) \simeq TC_t$
- élimine la saisonnalité stable :  $M(S_t) = 0$
- réduit le bruit :  $\mathbb{V}[M(I_t)] \ll \mathbb{V}[I_t] \implies M(I_t) \simeq 0$

## Les moyennes mobiles (2/2)

---

2. Moyennes mobiles de Macurves (pour extraire la saisonnalité)  $\rightarrow M_{3 \times 5}$ 
  - réduit le bruit
  - conserve la saisonnalité stable :  $M(S_t) = S_t$
3. Moyennes mobiles de Henderson (pour extraire la tendance)  $\rightarrow H_{13}$ 
  - conserve la tendance polynomiale (ordre 3) :  
 $M(at^3 + bt^2 + ct + d) = at^3 + bt^2 + ct + d$
  - n'élimine pas la saisonnalité :  $M(S_t) \neq 0$  et  $M(S_t) \neq S_t$
  - réduit le bruit au maximum

## Principe itératif de X11 (1/2)

Une première estimation de la CVS :

1. Estimation de la **tendance-cyle** par moyenne mobile  $2 \times 12$  :

$$TC_t^{(1)} = M_{2 \times 12}(X_t)$$

2. Estimation de la composante **saisonnier-irrégulier** :

$$(S_t + I_t)^{(1)} = X_t - TC_t^{(1)}$$

3. Estimation de la composante **saisonnrière** par moyenne mobile  $3 \times 3$  sur **chaque mois** :

$$S_t^{(1)} = M_{3 \times 3} \left[ (S_t + I_t)^{(1)} \right] \text{ et normalisation } Snorm_t^{(1)} = S_t^{(1)} - M_{2 \times 12} \left( S_t^{(1)} \right)$$

4. Estimation de la série corrigée des variations saisonnières :

$$Xsa_t^{(1)} = (TC_t + I_t)^{(1)} = X_t - Snorm_t^{(1)}$$



## Principe itératif de X11 (2/2)

Une seconde estimation de la CVS :

1. Estimation de la **tendance-cyle** par moyenne de Henderson (généralement 13 termes) :

$$TC_t^{(2)} = H_{13}(Xsa_t^{(1)})$$

2. Estimation de la composante **saisonnier-irrégulier** :

$$(S_t + I_t)^{(2)} = X_t - TC_t^{(2)}$$

3. Estimation de la composante **saisonnrière** par moyenne mobile  $3 \times 5$  (généralement) sur **chaque mois** :

$$S_t^{(2)} = M_{3 \times 5} \left[ (S_t + I_t)^{(2)} \right] \text{ et normalisation } Snorm_t^{(2)} = S_t^{(2)} - M_{2 \times 12} \left( S_t^{(2)} \right)$$

4. Estimation de la série corrigée des variations saisonnières :

$$Xsa_t^{(2)} = (TC_t + I_t)^{(2)} = X_t - Snorm_t^{(2)}$$

# Les étapes de X11

---

7 grandes étapes A à G

**Étape A** : ajustements préalables (n'est plus utile)

**Étapes B et C** : corrections automatiques (sur l'Irrégulier)

**Étape D** : désaisonnalisation finale

**Étapes E, F et G** : indicateurs et graphiques pour juger de la qualité de la décomposition (n'est plus utile avec JDemetra+)

## Les corrections automatiques de X11 (2/2)

---

Il existe un algorithme de détection et de correction des outliers et des effets de calendrier dans X11, **indépendant du module reg-ARIMA**.

Ces détections sont faites sur la **composante irrégulière**.

Elles s'effectuent dans les étapes B, C et D.

Quand on n'autorise pas la correction des outliers dans la phase de pré-ajustement, X11 le fait quand même dans la phase de décomposition, avec pour conséquences :

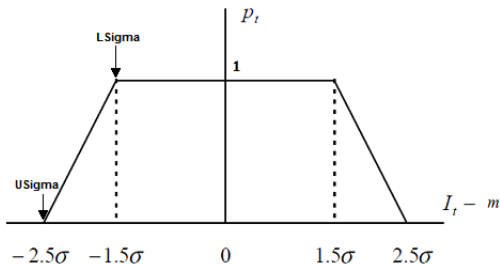
- moins de visibilité et de maîtrise sur les outliers, leur nombre et leur nature (AO, LS ou TC) ;
- la prévision du modèle Reg-ARIMA sera moins précise.

## Les corrections automatiques de X11 (2/2)

Étape 1 : calcul d'un écart-type mobile de l'irrégulier sur des intervalles de 5 ans

- Tout point  $I_t$  de l'année centrale telle que  $|I_t - m| > 2,5\sigma_t$  est considéré comme aberrant et « supprimé »
- On recalcule l'écart-type (estimation plus robuste)

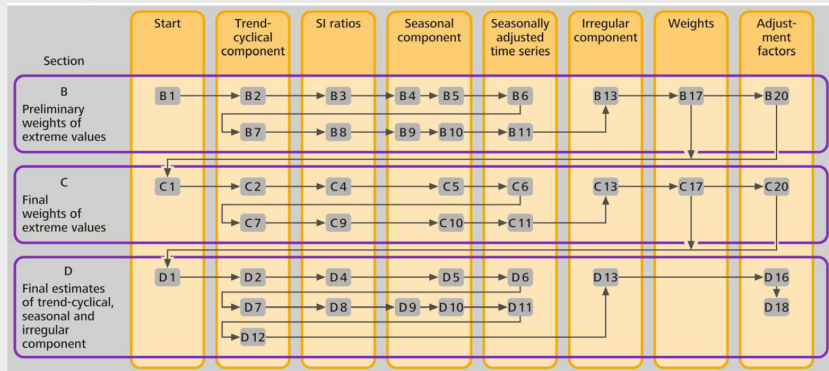
Étape 2 : On affecte un poids à chaque  $I_t$  en fonction du  $\sigma$  associé (l'année centrale étant l'année de  $t$ )



# Bilan des étapes de X11

## Basic principle of the X-11 seasonal adjustment algorithm in JDemetra+

Workflow diagram



Deutsche Bundesbank

S3PR0037B.Chart

# Sommaire

---

1. Phase de pré-ajustement : modèle Reg-ARIMA
2. Phase de décomposition (X11)
- 3. Conclusion**

# Les essentiels

---

- X13-ARIMA travaille en deux phases : pré-ajustement et décomposition
- Le pré-ajustement linéarise (par régression) et prolonge les séries en faisant des prévisions (par modèle ARIMA)
- La décomposition X11 estime la composante Saisonnière
- X11 utilise plusieurs moyennes mobiles ayant des propriétés complémentaires, de manière successive et itérative : principe itératif de X11